2009,**29A**(1):151–157

Mathematica Acta Scientia
数学物理学报

模丛上的嵌入子丛 *

[1,2] 张飞军　[2] 李开泰
([1] 陕西师范大学数学与信息科学学院　陕西西安 710062; [2] 西安交通大学理学院　陕西西安 710049)

摘要：利用模丛之间的嵌入关系，构造出了自由丛的嵌入子丛和任一模丛的嵌入子自由丛. 得到一般模丛都能够成为一个自由丛的嵌入子丛；同时任一模丛也能够有一自由丛 (或投射丛) 是它的嵌入子丛；还给出了投射丛转化为自由丛的条件.

关键词：纤维丛；模丛；浸入子丛；嵌入子丛.

MR(2000) 主题分类: 55R10　**中图分类号**: O189.3　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2009)01-151-07

1 引言

纤维丛是建立在底空间上的一族参数化的几何对象，它将拓扑学与微分几何结合，是 20 世纪几何学研究的重要组成部分，并在理论物理中得到广泛应用. 由于纤维丛的组成结构复杂，所用的五个概念结构各自变化多样，就产生了各式各样的纤维丛. 如在文献 [1] 中讨论了一种高度螺线纤维丛，局部上看象是一丛丛直线束，它与底的任一横截面切割成一个康托型集；在文献 [2–3] 等中又给出了 Buchsbaum 丛、辛几何上的标架丛等. 在文献 [4] 中我们讨论了一种纤维是模结构的模丛.

不管是什么样的纤维丛，丛理论的中心问题是要指出结构变化时，其示性类的区别有多大，也就是丛映射的结果如何. 因此有很多研究丛映射的文章，如文献 [5] 中利用 Postnikov 分解理论讨论了一类纤维丛偶之间丛映射的存在性；文献 [6] 讨论了紧 Kähler 流形上 G - 主丛模空间以及它上的嵌入映射；文献 [7] 讨论了丛的广义联络映射；文献 [11] 利用向量丛上的映射将向量丛进行了分类，讨论了 Thom 类丛；文献 [8] 讨论了模丛上的浸入映射关系，这将使对模空间所作的一些构造能移到模丛上来，其结果是可以在模丛之间建立一种同调理论. 因此讨论模丛之间的丛映射是尤为重要的. 本文就是在文献 [8] 的基础上进一步讨论模丛之间的、更重要的嵌入关系，使一般模丛都能够成为一个自由丛的嵌入子丛，同时任意模丛也能有一个自由丛 (或投射丛) 是它的嵌入子丛，从而可使模丛这个杂乱庞大的内在局部结构通过较为有规律的、有基的自由丛的嵌入，使我们认识模丛结构变得较为简单.

定义 1　设 M 和 N 分别为两个 m, n 维 C^r 流形. 如果有 $C^k(1 \le k \le r)$ 映射 $f: M \longrightarrow N$ 满足

(1) f 是单一的；

(2) 在任意一点 $p \in M$, 切映射 $f_*: T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$ 都是非退化的，则称 f 为一个 C^k 嵌入，此时就称 (f, M) 为 N 的嵌入子流形.

收稿日期：2006-11-15; 修订日期：2008-04-25

E-mail: fjzhang@snnu.edu.cn

* 基金项目：国家自然科学基金 (10571115) 资助

如果映射 f 只满足条件 (2), 则称 f 是一个 C^k 浸入. 浸入在局部上是单一的, 但不能保证在大范围上是单一的, 浸入子流形和嵌入子流形的区别就在于象集 $f(M)$ 是否有自交点. 特别地, 若 $f: M \longrightarrow f(M) \subset N$ 是同胚映射, 则称 f 是 M 在 N 中的正则嵌入.

定义 2 若 $\xi = (E, \pi, M, V, G), \eta = (E', \pi', M, V', G')$ 是同一底空间上的两个 R - 模丛, 如果存在丛映射 ψ, 使对 $\forall p \in M$, 纤维映射

$$\psi\,|_p: \pi^{-1}(p) \longrightarrow (\pi')^{-1}(p)$$

都是 R - 单模同态, 则称 ψ 是丛 ξ 在丛 η 的嵌入映射, 或称丛 ξ 是丛 η 的嵌入子丛.

设 $x, \widetilde{x}$ 是丛 ξ 中不同的两点, 若它们是同一基点 p 纤维上的两点, 不妨设 $x, \widetilde{x} \in \pi^{-1}(p)$, 因为 $\psi\,|_p$ 是 R - 单模同态, 则 $\psi\,|_p\,(x) \neq \psi\,|_p\,(\widetilde{x})$; 若它们是不在同一纤维上的两点, 由丛映射的保纤性知, 丛映射 ψ 将 $x, \widetilde{x}$ 映为不同纤维上的两点, 当然它们的象也不相等. 因此丛映射 ψ 一定是单射.

设 (U, x^i) 是点 $p \in M$ 在底空间上的一个局部坐标系, 由丛定义知: $\pi^{-1}(p)$ 与 $\{x^i(p)\} \times V$ 同构, $(\pi')^{-1}(p)$ 与 $\{x^i(p)\} \times V'$ 同构, 纤维映射为

$$\psi|_p : \pi^{-1}(p) \longrightarrow (\pi')^{-1}(p).$$

对 $\forall q \in \pi^{-1}(p)$, 由同构及丛局部图表可换, 可以设 $(\pi^{-1}(U), y^i)$ 和 $((\pi')^{-1}(U), z^i)$ 分别是包含点 q 和点 $\psi(q)$ 的坐标卡, 则可将丛 ξ 上点 q 的坐标 $y^i(q)$ 表示为 $(x^i, y^i(v))$, 其中 $v \in V$, 同理可将 $\psi(q)$ 的坐标 $z^i(\psi(q))$ 表示为 $(x^i, z^i(v'))$, 其中 $v' = \psi(v) \in V'$.

此时丛映射 ψ 在局部坐标系下的切映射 $\psi_* : T_qE \longrightarrow T_{\psi(q)}E'$ 就表示为

$$z^i = z^i(\psi(q)) = x^i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$z^i = z^i(\psi(q)) = z^i \circ \psi \circ (y^i)^{-1}(q), \quad i > m.$$

ψ 的切映射 $\psi_* : T_qE \longrightarrow T_{\psi(q)}E'$ 所对应的基变换表达式为

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial z^i(v')}{\partial y^i(v)} \end{pmatrix}.$$

因为 ψ 是模同态, 所以 $\frac{\partial z^i(v')}{\partial y^i(v)}$ 是非退化的矩阵, 因此切映射在点 q 是非退化的. 特别地, 若模同态 $\psi : \pi^{-1}(p) \longrightarrow (\pi')^{-1}(p)$ 的秩 $\mathrm{rank}(\frac{\partial z^i(v')}{\partial y^i(v)}), i > m$ 有限, 则 $\mathrm{rank}(\frac{\partial z^i}{\partial y^i})$ 就等于丛 ξ 的维数, 因此定义 2 是定义 1 的合理推广.

定义 3 模丛 $\xi = (E, \pi, M, V, G)$, 若纤维型 V 是 R - 单模, 则称 ξ 为单模丛; 若纤维型 V 是 R - 自由模, 则称 ξ 为自由丛; 若纤维型 V 是 R - 投射模, 则称 ξ 为投射丛.

对任意的 $p \in M$, 根据模丛定义中 "纤维 $V_p = \pi^{-1}(p)$ 与纤维型 V 同构" 的条件, 得出单模丛、自由丛、投射丛的纤维也分别是单模、自由模、投射模. 如此就有自由丛是投射丛, 但投射丛不一定是自由丛. 下面我们所讨论的模丛都是在相同的底空间 M 和相同的酉环 R 上进行的.

2 定理和证明

定理 1 单模丛可以嵌入到任一模丛中, 即它是任一模丛的嵌入子丛.

证 设 $\xi=(E,\pi,M,V,G)$ 是 R - 单模丛，$\eta=(E',\pi',M,V',G')$ 是任意 R - 模丛. 因为 ξ 的纤维 $\pi^{-1}(p)(\forall p\in M)$ 是 R - 单纯模，η 的纤维 $(\pi')^{-1}(p)$ 是 R - 模. 所以有单模同态(而且是嵌入映射)

$$\varphi_p:\pi^{-1}(p)\longrightarrow(\pi')^{-1}(p).$$

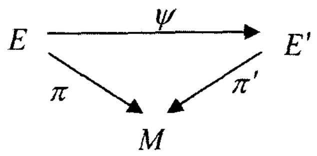
令 $\psi:E\longrightarrow E'$, 使满足：对 $\forall y\in E$(存在 $p\in M$, 使 $y\in\pi^{-1}(p)$) 有

$$\psi(y)=\varphi_p(y)\in(\pi')^{-1}(p)\subset E'.$$

根据模丛的局部平凡性知，ψ 是单丛映射，而且还有

$$\pi'\circ\psi(y)=\pi'(\varphi_p(y))=p,\quad \pi(y)=p,$$

则存在单丛映射 ψ, 使得下列关系式



可换，即有 $\pi'\circ\psi=\pi$. 这说明 ξ 可以嵌入到 η 中. ∎

特别地，若 ξ,η 的纤维型 V,V' 之间给定一拓扑变换，使 $\psi_p(\pi^{-1}(p))$ 的诱导拓扑与 ${\pi'}^{-1}(p)$ 的拓扑一致，那么这样的嵌入就是一个正则嵌入. 以下讨论的问题都有如此类似的结论.

定理 2 对任意投射丛都存在一自由丛，使投射丛是该自由丛的嵌入子丛.

证 设 $\xi=(E,\pi,M,V,G)$ 是任一投射丛，对底空间 M 上任一点 p, 都有 $\pi^{-1}(p)(={\pi_p}^{-1})$ 和 V 是 R - 投射模，由投射模的等价定义知，存在自由模 V_p, 使 $V_p={\pi_p}^{-1}\oplus S_p$.

于是令

$$E'=\bigcup_{p\in M}({\pi_p}^{-1}\oplus S_p),\quad \pi'=\pi\circ p_1:E'\longrightarrow M,$$

其中 p_1 是直和 ${\pi_p}^{-1}\oplus S_p$ 的第一投射，由此规定的 π' 是满射，通过 (E',π',M) 可以构造一自由丛.

不妨设 U 是包含点 p 的、M 上的开集，根据流形结构的相容性，可以选取 E 的一个局部坐标卡 (U_α,ψ_α), 使 $p\in\pi(U_\alpha)$, 且 $\pi^{-1}(U)=U_\alpha$. 由丛定义存在局部同胚映射

$$\varphi_\alpha:U_\alpha\times V\longrightarrow\pi^{-1}(U_\alpha),$$

则有

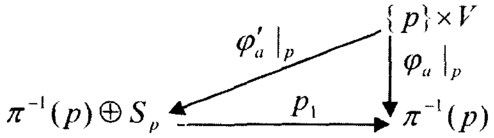
$$\varphi_\alpha|_p:\{p\}\times V\longrightarrow\pi^{-1}(p)$$

为模同构，由文献 [9] 顺其自然的想法是扩充 $\varphi_\alpha|_p$ 为 $\varphi'_\alpha|_p$, 使 $\varphi'_\alpha|_p:\{p\}\times V\longrightarrow\pi^{-1}(p)\oplus S_p$.

由于 V 是投射模，很容易在 $\{p\}\times V$ 中定义一种运算，使它成为 R - 模. 规定

$$(p,a)+(p,b)=(p,a+b),\forall a,b\in V,$$

则 $\{p\}\times V$ 也是投射模，由投射模性质可知，存在 $\varphi'_\alpha|_p$, 使下列关系式



可换，即有 $\varphi_\alpha|_p = p_1 \circ \varphi'_\alpha|_p$.

由同胚 $\varphi_\alpha|_p$, 可说明 $\varphi'_\alpha|_p$ 是单射，但不能说明 $\varphi'_\alpha|_p$ 是满射，故也就无法得到它是同胚，因此这样的构造自由丛是行不通的. 以下我们寻找一种新的构造丛方法.

令 p 、 $q \in M$, 则有自由模 $V_p = \pi^{-1}(p) \oplus S_p$ 、 $V_q = \pi^{-1}(q) \oplus S_q$, 其中 $\pi^{-1}(p)$ 、 $\pi^{-1}(q)$ 都与 V 同胚 (即线性同构), 所以有 $\pi^{-1}(p) \cong \pi^{-1}(q)$, 且 $\pi^{-1}(p)$ 、 $\pi^{-1}(q)$ 为投射模，则有自由模 B 及满同态 f 、 f' 使

$$f : B \longrightarrow \pi^{-1}(p), \qquad f' : B \longrightarrow \pi^{-1}(q).$$

取 $A = \ker f, A' = \ker f'$ 则得短正合列

$$A \longrightarrow B \xrightarrow{f} \pi^{-1}(p), \qquad A' \longrightarrow B \xrightarrow{f'} \pi^{-1}(q).$$

因为 $\pi^{-1}(p) \cong \pi^{-1}(q)$, 所以 $A \cong A'$. 由上式短正合列可得，存在 $C' \cong \pi^{-1}(p) \cong \pi^{-1}(q)$, 使

$$B = A \oplus C' \cong A \oplus \pi^{-1}(q) = \pi^{-1}(q) \oplus S_q = V_q.$$

所以 $V_p \cong V_q$. 在 M 上取定一点其自由模记为 V', 显然 V' 为 R 上模且 $V' \cong V_p \cong V_q$, 将此作为丛 (E', π', M) 的纤维型，由此定义

$$\varphi'_\alpha : U_\alpha \times V' \longrightarrow (\pi')^{-1}(U_\alpha),$$

使

$$\varphi'_\alpha|_p : \{p\} \times V' \longrightarrow \pi^{-1}(q) \oplus S_p,$$

故 $\varphi'_\alpha|_p$ 为一个模同构，因此

$$\varphi'_\alpha : U_\alpha \times V' \longrightarrow (\pi')^{-1}(U_\alpha)$$

为一同胚映射.

考虑 E' 的子集族

$$\Phi = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{\varphi'_\alpha(W) : W \text{ 是 } U_\alpha \times V' \text{ 中任意的开子集}\},$$

容易验证 Φ 是 E' 的一个拓扑基，有了拓扑基仿照切矢量丛的构造方法就能自然得到 E' 的流形结构.

由此找到自由丛 (E', π', M, V', G'), 对 $\forall p \in M$, 丛映射

$$\psi : E \longrightarrow E'$$

的纤维映射

$$\psi\,|_p : \pi^{-1}(p) \longrightarrow (\pi')^{-1}(p) = \pi^{-1}(p \oplus S_p)$$

都是 R - 单模同态，所以自由丛 (E', π', M, V', G') 为给定投射丛 (E, π, M, V, G) 的嵌入自由丛. ▮

根据定理 2 给定底空间 M 及任一点 $p \in M$ 的纤维找丛的方法，又可得到下列推论.

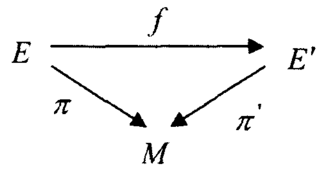
推论 设 (E', π', M) 为任一模丛，则它有一个自由丛 (E, π, M), 能使丛映射

$$f : E \longrightarrow E'$$

为满射，即对

$$f_p : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \pi'^{-1}(p), \forall p \in M$$

为满同态，并且使下列关系式



可换. 即任一模丛，都存在一自由丛使它是该自由丛的嵌入子丛.

由于自由丛是投射丛，所以推论中“自由丛”改为“投射丛”也成立.

推论说明对任一模丛，都可以嵌入到某一自由丛 (或投射丛) 中，当然任一模丛不可能嵌入某一自由丛中，否则任一模丛就都只有自由丛的特性了. 但我们有如下更进一步的结论.

定理 3 设 $\xi = (E, \pi, M, V, G)$ 是任意 R - 模丛，若存在自由 R - 模 A, 使

$$\varphi : V \longrightarrow A$$

是满同态，则存在一自由丛 $\eta = (E', \pi', M, A, G')$ 是 ξ 的嵌入子丛.

证 因为 $\varphi : V \longrightarrow A$ 是满同态，且 A 是自由 R - 模，不妨设 Y 是 A 的基，对每个 $b \in Y \subset A$ 选定一个 $a_b \in V$ 使 $\varphi(a_b) = b$. 那么映射

$$\varphi' : A \longrightarrow V$$

定义为

$$\varphi'(\sum br) = \sum a_b r \in F$$

(其中 $r \in R$). 则 φ' 是一个 R - 模同态，取 R - 模 B=Im(φ'), 则

$$\varphi' : A \longrightarrow B \subset V$$

是一个 R - 模同构，则 B 也是自由 R - 模且有 $V = B \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$. 按照定理 2 的方法可以构造一自由丛 $\eta = (E', \pi', M, B, G')$.

对 $\forall p \in M$, 由于 $(\pi')^{-1}(x) \cong B, \pi^{-1}(p) \cong V = B \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$, 不妨设它们的模同构分别为 σ_1 、 σ_2. 所以可构造自然的丛映射

$$\psi : E' \longrightarrow E,$$

使对 $\forall x \in M$, $\quad \psi_p : (\pi')^{-1}(p) \longrightarrow \pi^{-1}(p)$ 满足

$$\sigma_2 \circ \psi_p \circ \sigma_1^{-1} : B \longrightarrow V = B \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$$

是对 F 的第一投射，因此 ψ_p 是单同态，则丛 η 是丛 ξ 的嵌入子丛. ∎

在本定理中有“若存在自由 R - 模 A, 使 $\varphi : V \longrightarrow A$ 是满同态”的条件限制，但熟知这样的自由 R - 模 A 是很多的，如选取模 F 中适当元素作为模 A 的基，显然有满同态 $\varphi : V \longrightarrow A$ 存在. 根据需要可以取不同的满同态，因此这样的条件限制对本定理的成立并不严格.

有了上述推论和定理 3, 今后研究模丛就可转化为研究与其相关的自由丛 (或投射丛), 而自由丛的许多性质和矢量丛有相似之处，如此可使复杂问题简单化.

自由丛是投射丛，但投射丛不一定是自由丛. 下面给出投射丛是自由丛的一个条件.

定理 4 设 $\xi=(E,\pi,M,V,G)$ 是 R - 投射丛，若 R 是整数环，则 ξ 是自由丛.

因为纤维型 V 是整数环 R 上的投射模，由模论知整数环 R 上的投射模是自由模，因此 V 是 R 上自由模，则 ξ 是自由丛. 故整数环上的投射丛和自由丛是等价的.

3 相关结论

纤维丛理论的一个重要成果就是引进了示性闭上链，示性类是底流形上的同调类，用以区别不等价的纤维丛. 纤维丛上映射的正合性是研究纤维丛示性类的一种主要计算方法 [12], 下面我们给出一个与模丛映射正合有关的定理.

定理 5 对任一模丛 (E,π,M), 可以得到一个投射分解 $\{\xi_n,f_n\}$

$$\cdots\longrightarrow E_n\xrightarrow{f_n}E_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_2}E_1\xrightarrow{f_1}E,$$

其中 $\xi_n=(E_n,p_n,M)$ 是投射丛，每一 f_n 是满射，且有 $f_n\circ f_{n+1}=0$.

证 由于每一个丛 (E,π,M) 都有一个投射丛 (E_1,p_1,M) 且 f_1 是满射，由文献 [9] 中的方法可以作一短模丛正合列

$$(N_1,\pi_1,M)\xrightarrow{i}(E_1,p_1,M)\xrightarrow{f_1}(E,\pi,M),$$

其中 i 是典型包含同态，对于丛 (N_1,π_1,M) 也同样有一个短正合列

$$(N_2,\pi_2,M)\xrightarrow{i}(E_2,p_2,M)\xrightarrow{f_2}(N_1,\pi_1,M),$$

即得

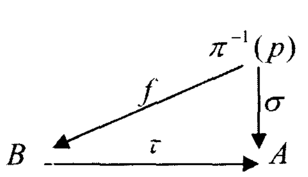
$$(N_2,\pi_2,M)\xrightarrow{i}(E_2,p_2,M)\xrightarrow{f_2}(E_1,p_1,M)\xrightarrow{f_1}(E,\pi,M),$$

且有 $f_1\circ f_2=0$, 继续如此作法，即得所需结论，并且它们构成一个复形. ▮

向量丛上的正合性讨论过可裂条件 [13], 对特殊的模丛 - 投射丛也可得到更广范围的正合列的可裂性.

定理 6 设 $\xi=(E,\pi,M)$ 为一投射丛，则以 ξ 为第三项的短正合列都可裂. 即若存在模丛 $(E_1,p_1,M),(E_2,p_2,M)$, 使 $E_1\longrightarrow^{f_1}E_2\longrightarrow^{f_2}E$ 为短正合列，则必可裂.

证 对 $\forall p\in M,\pi^{-1}(p)$ 为投射模，由投射模定义知，若 $\sigma\in\mathrm{Hom}(\pi^{-1}(p),A)$, 对任何满同态 $\tau\in\mathrm{Hom}(B,A)$, 恒有同态 $f\in\mathrm{Hom}(\pi^{-1}(p),B)$, 使 $\tau\circ f=\sigma$, 即有下列关系式



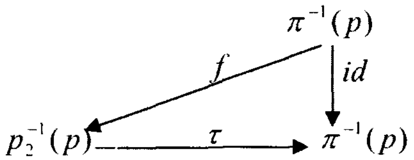
交换.

特别地取

$$A=\pi^{-1}(p),\quad \sigma=id\in\mathrm{Hom}(\pi^{-1}(p),\pi^{-1}(p)),$$

$$B={p_2}^{-1}(p),\quad \tau=f_2|_{{p_2}^{-1}(p)}\in\mathrm{Hom}({p_2}^{-1}(p),\pi^{-1}(p)),$$

有下列关系式



交换．即有同态 $f \in \mathrm{Hom}(\pi^{-1}(p), p_2{}^{-1}(p))$ 使 $\tau \circ f = id$, 所以短正合列右可裂．

对于模范畴，任意单边可裂的短正合列必定是双边可裂的，因此定理得证． ▮

参 考 文 献

[1] 武宝亭．高度螺旋纤维丛的机理研究．数学的实践与研究， 1997, **27**(2): 148–152

[2] Chang Meichun. Some remarks on Buchsbaum bundles. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, **152**(1–3): 49–55

[3] Lawson J K. A frame bundle generalization of multisymplectic geometries. Reports on Mathematical Physics, 2000, **45**(2): 183–205

[4] 张飞军，王宝勤．模丛．新疆师范大学学报， 1998, **18**(3): 1–4

[5] 古志鸣．一类丛映射的存在性．中国科学 (A 辑),2001, **31**(6): 517–522

[6] Indranil Biswas, Georg Schumacher. Kähler structure on moduli spaces of principal bundles. Differential Geometry and its Applications, 2007, **25**(2): 136–146

[7] Cantrijn F, Langerock B. Generalised connections over a vector bundle map. Differential Geometry and its Applications, 2003, **18**(3): 295–317

[8] 张飞军．自由丛，投射丛与一般模丛的浸入性．工程数学学报， 2004, **21**(3): 248–250

[9] Dale Husemoller. Fibre Bundles (second edition). Beijing: World Publishing Corporation, 1975

[10] Boeckx E, Vanhecke L. Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent bundles. Differential Geometry and its Applications, 2000, **13**(1): 77–93

[11] Michel Bauer, Frank Thuillier. Representatives of the thom class of a vector bundle. Joural of Geometry and Physics, 1998, **25**(1–2): 29–45

[12] Callegaro F. On the cohomology of Artin groups in local systems and the associated Milnor fiber. Journal of Pure and Applied Algebra, 2005, **197**(1–3): 323–332

[13] Carl H, Brans, Duane Randall. On splitting topological R4-bundles. Topology and its Applications, 1992, **43**(1): 37–45

The Embedded Subbundles over Module Bundles

[1,2]Zhang Feijun [2]Li Kaitai

([1]*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Shaanxi Xi'an 710062;*
[2]*School of Science, Xi'an Jiaotong University, Shaanxi Xi'an 710049*)

Abstract: To construct the embedded subbundles of free bundles and the embedded free subbundles of any module bundles, by using embedded relation of module bundles. It is indicated that any module bundles can becomes a embedded subbundles of free bundles,and that there is a free bundles (or projective bundles) is a embedded subbundles of any module bundles also. In particular, the condition which projective bundles change into free bundles is given.

Key words: Fibre bundles; Module bundles; Immersed subbundles; Embedded subbundles.

MR(2000) Subject Classification: 55R10